DM 6 – Matrices et polynômes : corrigé

Exercice 1 : Vers les polynômes de matrices

1) Comme on réalise une division euclidienne de X^k par P, on a $\deg R_k < \deg P = 2$. Ainsi R_k est de degré au plus 1, c'est un élément de $\mathbb{K}_1[X]$. On peut donc l'écrire sous la forme $R_k = a_k X^k + b_k$ avec $a_k, b_k \in \mathbb{K}$.

2)
- Pour $k = 0$, on remarque que
$$X^0 = 1 = 0P + 1 \qquad \text{et} \qquad \deg(1) < \deg P$$
donc il s'agit de la division euclidienne de X^0 par P. Ainsi $R_0 = 1$. On a donc
$$\boxed{(a_0, b_0) = (0, 1)}$$
- Pour $k = 1$, on a de même $X^1 = X = 0P + X$ avec $\deg X < \deg P$ donc $R_1 = X$. Ainsi,
$$\boxed{(a_1, b_1) = (1, 0)}$$
- Pour $k = 2$, on a $X^2 = P + (\theta X - \delta)$ avec $\deg(\theta X - \delta) \leq 1 < \deg P$ donc $R_2 = \theta X - \delta$. Ainsi,
$$\boxed{(a_2, b_2) = (\theta, -\delta)}$$

3) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$X^k = QP + a_k X + b_k$$
On va déterminer la division euclidienne de X^{k+1} par P à partir de cette relation. En multipliant par X, on a donc
$$X^{k+1} = XQP + a_k X^2 + b_k X$$
Or, par la question précédente, $X^2 = P + \theta X - \delta$, d'où
$$\begin{aligned} X^{k+1} &= XQP + a_k P + a_k \theta X - \delta a_k + b_k X \\ &= [XQ + a_k]\, P + (a_k\theta + b_k)X - \delta a_k \end{aligned}$$
On pose $S = (a_k\theta + b_k)X - \delta a_k$. Comme $\deg S < \deg P$, il s'agit bien de la division euclidienne de X^{k+1} par P. Ainsi, par unicité du reste, $R_{k+1} = S = a_{k+1}X + b_{k+1}$. Ainsi, par identification,
$$a_{k+1} = a_k\theta + b_k \qquad \text{et} \qquad b_{k+1} = -\delta a_k$$

4)
$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$
et donc
$$\begin{aligned} A^2 - \theta A + \delta I_2 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - \theta a + \delta & ab + bd - b\theta \\ ca + dc - c\theta & bc + d^2 - \theta d + \delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Ainsi, en utilisant que $\theta = a + d$ et $\delta = ad - bc$, on vérifie après calculs (qui sont omis dans ce corrigé) que $A^2 - \theta A + \delta I_2 = 0$

5)
- Initialisation : pour $k = 0$, on a $A^0 = I_2 = a_0 A + b_0 I_2$ par la question 2. La propriété est donc vérifiée pour $k = 0$.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = a_k A + b_k I_2$. Montrons que cette propriété est vraie au rang $k + 1$.
$$\begin{aligned} A^{k+1} &= a_k A^2 + b_k A \\ &= a_k(\theta A - \delta I_2) + b_k A && \text{par la question 4} \\ &= (\theta a_k + b_k)A - a_k \delta I_2 \\ &= a_{k+1} A + b_{k+1} I_2 && \text{par la question 3} \end{aligned}$$
La propriété est donc vérifiée au rang $k + 1$.
- Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k = a_k A + b_k I_2$.

6) a) On sait que $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ divise P, et donc il existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ tel que
$$P = \mu(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$$
En égalisant les coefficients dominants, on trouve $\mu = 1$. Ainsi $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$X^k = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)Q_k + a_k X + b_k$$
En évaluant en λ_1 puis en en λ_2, on trouve
$$\begin{cases} \lambda_1^k = a_k \lambda_1 + b_k \\ \lambda_2^k = a_k \lambda_2 + b_k \end{cases}$$
La résolution donne
$$\begin{cases} \lambda_1^k - \lambda_2^k = a_k(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \lambda_2\lambda_1^k - \lambda_1\lambda_2^k = b_k\lambda_2 - b_k\lambda_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{a_k = \dfrac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}} \\ \boxed{b_k = \dfrac{\lambda_2\lambda_1^k - \lambda_1\lambda_2^k}{\lambda_2 - \lambda_1}} \end{cases}$$

Pour $A = \begin{pmatrix} -29 & 40 \\ -24 & 33 \end{pmatrix}$, on a $\theta = -29 + 33 = 4$ et $\delta = -29 \times 33 - 40 \times (-24) = 3$. Ainsi,

$$P(X) = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$$

On peut donc poser $(\lambda_1, \lambda_2) = (3, 1)$. Alors par ce qui précède,

$$a_k = \frac{3^k - 1^k}{3 - 1} = \frac{3^k - 1}{2}$$

$$b_k = \frac{3^k - 3}{1 - 3} = -\frac{3^k - 3}{2}$$

On en déduit par la question 5 que

$$\boxed{A^k = \left(\frac{3^k - 1}{2}\right) A - \left(\frac{3^k - 3}{2}\right) I_2}$$

b) Comme λ est racine double, on a $P = (X - \lambda)^2$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$X^k = (X - \lambda)^2 Q + a_k X + b_k$$

En évaluant en λ, on trouve $\lambda^k = a_k \lambda + b_k$. De plus, en dérivant l'égalité ci-dessus, on trouve :

1) Si $k = 0$, on a l'équation $0 = 2(X - \lambda)Q + a_0$ et en évaluant en λ, on obtient $a_0 = 0$.

2) Si $k \geq 1$, on a l'équation $kX^{k-1} = 2(X - \lambda)Q + (X - \lambda)^2 Q' + a_k$ et en évaluant en λ, on obtient $a_k = k\lambda^{k-1}$.

Finalement, $a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ k\lambda^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$ et $b_k = \lambda^k - a_k \lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \lambda^k (1 - k) & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$

Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, on a $\theta = 2 - 4 = -2$ et $\delta = 2(-4) - 3(-3) = 1$. Ainsi,

$$P(X) = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$$

On peut donc poser $\lambda = -1$. Alors par ce qui précède,

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ k \times (-1)^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \qquad \text{et donc} \qquad a_k = (-1)^{k-1} k$$

$$b_k = \lambda^k - a_k \lambda = (-1)^k - (-1)^k k = (-1)^k (1 - k)$$

On en déduit par la question 5 que

$$\boxed{A^k = (-1)^k k A + (-1)^k (1 - k) I_2}$$

Exercice 2 : Un système paramétré

Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, le système suivant d'inconnues complexes :

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

On passe en matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & m+1 & -2 & 1-m \\ 0 & 0 & -2 & 1-m \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

- Si $m = -1$, alors le système devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ -2z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -1 \\ x = y \end{cases}$$

Ainsi, si $m = -1$, alors

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y,\ z = -1\right\} = \{(y, y, -1) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

- Si $m \neq -1$, alors on a 3 pivots (sur la diagonale) et donc on repasse en système :

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ (m+1)y - 2z = 1 - m \\ -2z = 1 - m \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \dfrac{m-1}{2} \\ (m+1)y + 1 - m = 1 - m \\ x - y = m - \dfrac{m-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{m-1}{2} \\ (m+1)y = 0 \\ x = y + \dfrac{m+1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \dfrac{m-1}{2} \\ y = 0 \\ x = \dfrac{m+1}{2} \end{cases} \quad \text{car } m + 1 \neq 0$$

Finalement, pour $m \neq 1$, on a $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{m+1}{2}, 0, \dfrac{m-1}{2}\right)\right\}$. Note : c'est un singleton, pour chaque valeur de m fixée, il n'y a qu'un triplet solution. En quelque sorte, $\mathcal{S}$ est un ensemble qui dépend de m et on devrait plutôt le noter $\mathcal{S}_m$.